

Введение

Элементы конструкций в виде пластин и оболочек вращения широко применяются в ракетостроении, авиастроении. В частности, такими элементами являются днища, корпуса, камеры сгорания, баки ракеты, воздушные и газовые баллоны. Распространение элементов в виде пластин и оболочек вращения вызвано их малым весом, рациональностью геометрических форм, хорошей технологичностью и экономичностью изготовления, высокой прочностью и жесткостью.

В ракетостроении и авиастроении важными критериями являются условия прочности и жесткости, в следствии того, что в процессе полёта конструкция летательного аппарата должна перенести аэродинамические нагрузки без повреждений и изменений формы.

Напряженно-деформированное состояние тонкостенных элементов более сложное, чем теория напряженного состояния бруса, поэтому в курсе

«Сопротивление материалов» почти не рассматривается.

Изм. Лист № докум. Подпись Дат

Курсовая работа по дисциплине «Строительная

механика ракет»

Лист

Расчет на жесткость и прочность включает в себя следующие этапы: выбор расчетной схемы, определение внутренних усилий, построение эпюр и определение величины максимально допустимой внешней нагрузки. Исходными данными для расчета являются взаимосвязь между геометрическими параметрами конструкции, свойства материала и допустимый уровень нагружения.

Цель данной курсовой работы - овладение методиками расчета на прочность и жесткость пластин и оболочек при различных способах нагружения, приобретение и закрепление уже имеющийся умений проведения расчета на прочность и жесткость элементов конструкции ракетной техники.

Задача 1. Расчеты на прочность и жесткость круглых пластин при осесимметричном изгибе

Постановка задачи:

Произвести расчет круглой пластины при осесимметричном изгибе.

Таблица 1 – Исходные данные.

$a, м$	$h, м$	Сталь	μ	$\sigma_T, МПа$	η_T	$E, МПа$
0,65	0,024	09Г2С	0,31	370	2,7	10^5

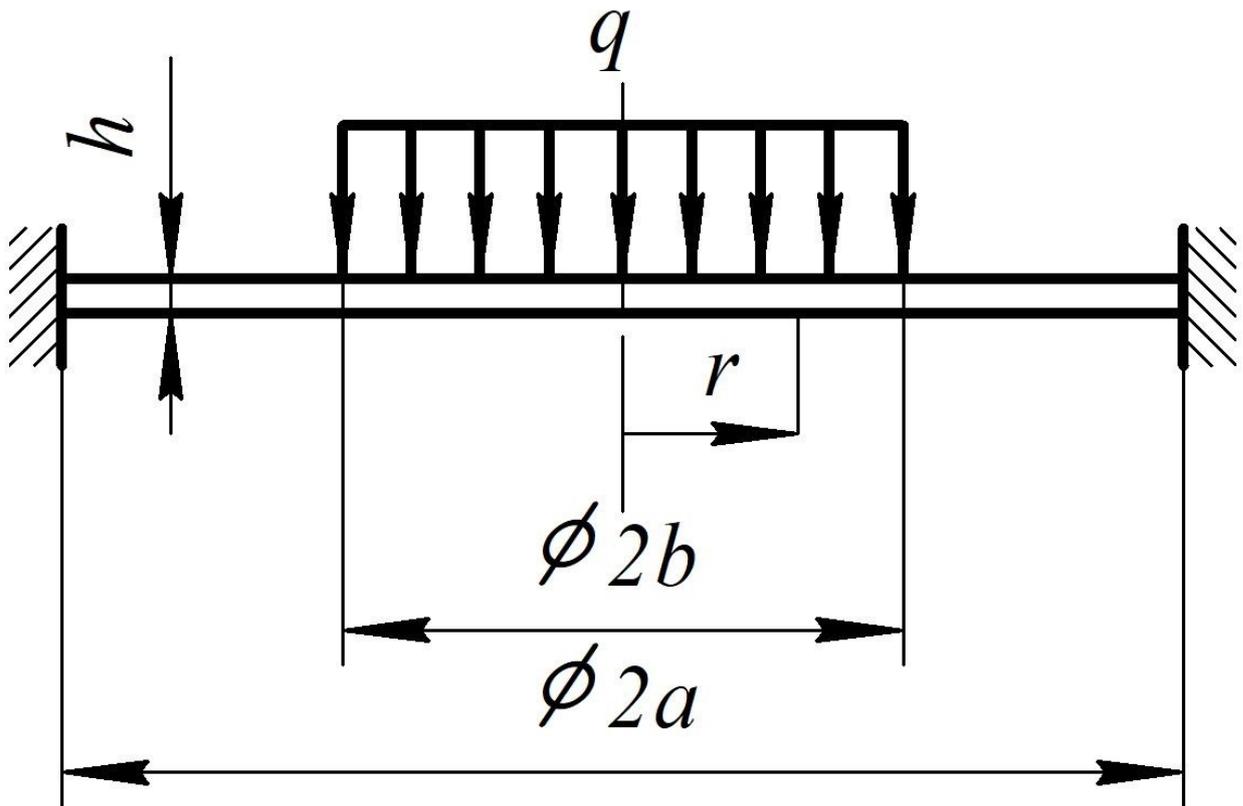


Рисунок 1 – Расчетная схема круглой пластины.

Дано:

- расчетная схема 8;
- геометрические размеры: $a=0,65 м$; $b=0,5 a=0,325 м$; $h=0,024 м$;
- материал: сталь 09Г2С; $\mu=0,31$; $\sigma_T=370 МПа$; $E=10^5 МПа$;
- допускаемый прогиб: $[w]=0,001 \cdot 2 a=0,0013 м$;
- коэффициент запаса прочности: $\eta_T=2,7$.

Требуется:

- построить эпюры M_r и M_θ в долях q ;
- построить эпюру $w(r)$ в долях $q a^2 / D$;
- определить допускаемую распределенную нагрузку $[q]$, удовлетворяющий условиям прочности и жесткости пластины.

Решение:

Определение функции прогиба срединной поверхности пластины:

При осесимметричном изгибе дифференциальное уравнение срединной поверхности круглой пластины имеет вид:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dw}{dr} = \frac{q(r)}{D},$$

где $q(r)$ – закон изменения распределенной нагрузки;

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} - \text{цилиндрическая жесткость};$$

E – модуль упругости (модуль Юнга);

μ – коэффициент Пуассона.

Общее решение уравнения:

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln(r) + C_3 r^2 + C_4 \ln(r) + w_1(r),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования.

Частное решение имеет вид:

$$w_1(r) = \frac{1}{D \int \frac{1}{r} dr}$$

Вследствие того, что на пластину не действует поперечная нагрузка, то частное решение $w_1(r) = 0$ и уравнение срединной поверхности принимает вид:

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln(r) + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln(r);$$

Разбиваем пластинку, как показано на рисунке 2 и определяем функцию прогиба для каждой ее части.

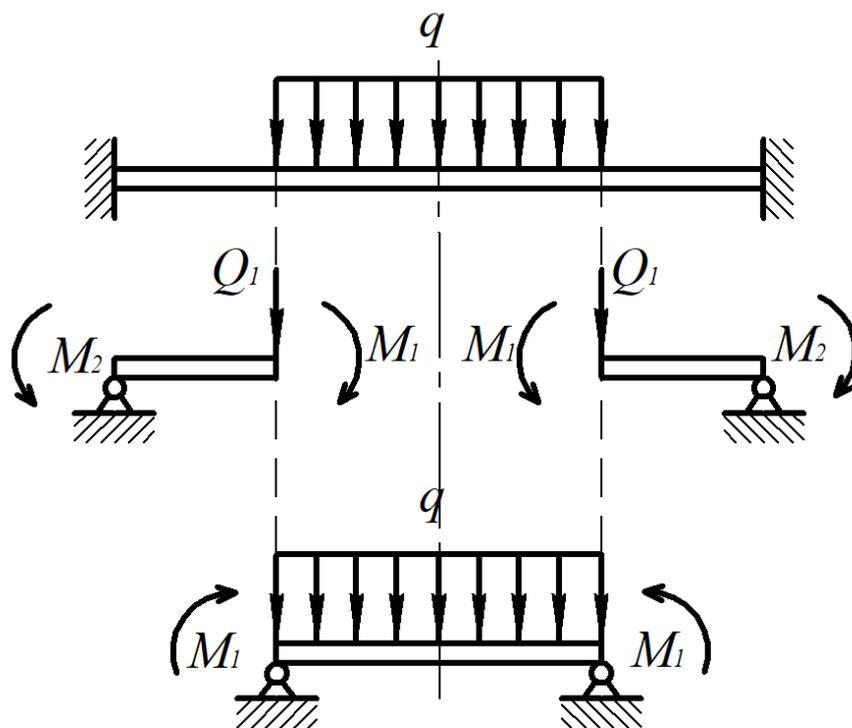


Рисунок 2 – *i* Разбиение круглой пластины.

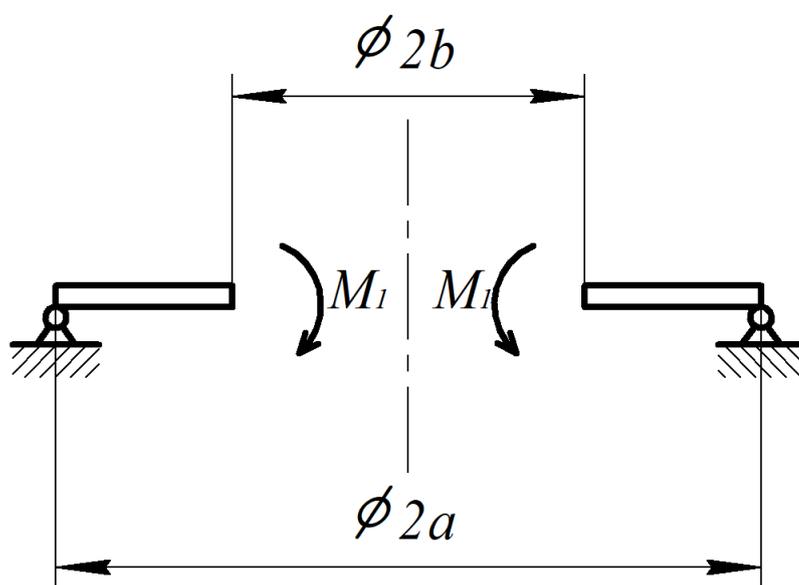


Рисунок 3 – *i* Первая часть расчетной схемы.

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 запишем четыре граничных условия:

1. $r=a w=0$ – прогиб на опоре;
2. $r=a M_r=0$ – условие закрепления;
3. $r=b M_r=M_1$ – условие нагружения;
4. $r=b Q_r=0$ – условие нагружения.

Находим производные:

$$w' = \frac{dw}{dr} = (C_1)'_r + (C_2 \ln(r))'_r + (C_3 r^2)'_r + (C_4 r^2 \ln(r))'_r = \dot{C}_1$$

$$\dot{C}_1 \frac{C_2}{r} + 2C_3 r + C_4 r(2 \ln(r) + 1);$$

$$w'' = \frac{d^2 w}{dr^2} = \left(\frac{C_2}{r}\right)'_r + (2C_3 r)'_r + \dot{C}_1 \dot{C}_1$$

$$\dot{C}_1 - \frac{C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln(r) + 3);$$

$$w''' = \frac{d^3 w}{dr^3} = \left(\frac{-C_2}{r^2}\right)'_r + (2C_3)'_r + \dot{C}_1 \dot{C}_1$$

$$\dot{C}_1 \frac{2C_2}{r^3} + \frac{2C_4}{r}.$$

Определяем поперечную силу в окружном сечении:

$$Q_r = D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = D \dot{C}_1$$

$$\left. \frac{+1}{r} \left(\frac{-C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln(r) + 3) \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{C_2}{r} + 2C_3 r + r C_4(2 \ln(r) + 1) \right) \right] = \dot{C}_1$$

$$\dot{C}_1 D \left[\frac{2C_2}{r^3} + \frac{2C_4}{r} - \frac{C_2}{r^3} + \frac{2C_3}{r} + \frac{C_4(2 \ln(r) + 3)}{r} - \frac{C_2}{r^3} - \frac{2C_3}{r} - \frac{C_4(2 \ln(r) + 1)}{r} \right] = \dot{C}_1$$

$$\dot{C}_1 D \left[\frac{2C_4 + 2C_4 \ln(r) + 3C_4 - 2C_4 \ln(r) - C_4}{r} \right] = \frac{4DC_4}{r}.$$

Из 4-го граничного условия ($r=b; Q_r=0$) получаем:

$$Q_r = \frac{4DC_4}{b} = 0 \text{ и } C_4 = 0.$$

Находим изгибающий момент в окружном сечении:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = i$$

$$i - D \left[\left(2C_3 - \frac{C_2}{r^2} + C_4(2 \ln(r) + 3) \right) + \frac{\mu}{r} \cdot \left(\frac{C_2}{r} + 2C_3 r + r C_4(2 \ln(r) + 1) \right) \right] = i$$

$$i - D \left[-C_2 \left(\frac{1-\mu}{r^2} \right) + 2C_3(1+\mu) \right].$$

Из 2-го ($r=a; M_r=0$) и 3-го ($r=b; M_r=M_1$) граничных условий получаем систему из 2-х уравнений:

$$\begin{cases} -D \left[-C_2 \left(\frac{1-\mu}{a^2} \right) + 2C_3(1+\mu) \right] = 0 \\ -D \left[-C_2 \left(\frac{1-\mu}{b^2} \right) + 2C_3(1+\mu) \right] = M_1 \end{cases};$$

$$-C_2 \left(\frac{1-\mu}{a^2} \right) + 2C_3(1+\mu) = 0;$$

$$C_2 \left(\frac{1-\mu}{a^2} \right) = 2C_3(1+\mu);$$

$$C_2 = 2a^2 C_3 \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu}.$$

Подставив C_2 во второе уравнение, получим:

$$D \cdot 2a^2 C_3 \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{1-\mu}{b^2} + 2DC_3(1+\mu) = M_1;$$

$$2DC_3(1+\mu) \cdot \frac{a^2}{b^2} - 2DC_3(1+\mu) = M_1;$$

$$2DC_3(1+\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) = M_1;$$

$$C_3 = \frac{M_1}{2D(1+\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right)}.$$

Подставляем C_3 в уравнение C_2 :

$$C_2 = 2a^2 \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{M_1}{2D(1+\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right)} = \frac{a^2 M_1}{D(1-\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right)}.$$

Уравнение прогиба с учетом найденных постоянных C_2 , C_3 и C_4 имеет следующий вид:

$$w = C_1 + \ln(r) \cdot \frac{a^2 M_1}{D(1-\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)} + r^2 \cdot \frac{M_1}{2D(1+\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)}.$$

Из 1-го граничного условия ($r = a; w = 0$) получим:

$$C_1 + \ln(a) \cdot \frac{a^2 M_1}{D(1-\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)} + a^2 \cdot \frac{M_1}{2D(1+\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)} = 0$$

$$C_1 = -\ln(a) \cdot \frac{a^2 M_1}{D(1-\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)} - a^2 \cdot \frac{M_1}{2D(1+\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)} = i$$

$$i = \frac{a^2 M_1}{2D \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)} \cdot \frac{2 \ln(a) \cdot (1+\mu) + (1-\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)}.$$

Уравнение наклона с учетом найденных постоянных C_1 , C_2 , C_3 и C_4 имеет следующий вид:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{a^2 M_1}{D(1-\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)} + 2r \cdot \frac{M_1}{2D(1+\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)} = i$$

$$i = \frac{b^2 M_1}{D} \cdot \left[\frac{a^2}{r(1-\mu) \cdot (a^2 - b^2)} + \frac{r}{(1+\mu) \cdot (a^2 - b^2)} \right] = i$$

$$i = \frac{a^2 b^2 M_1}{D(1-\mu) \cdot (a^2 - b^2)} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{r}{a^2} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \right).$$

Уравнение прогиба с учетом найденных постоянных C_1 , C_2 , C_3 и C_4 имеет следующий вид:

$$w_1 = \frac{-a^2 M_1}{2D \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)} \cdot \frac{2 \ln(a) \cdot (1+\mu) + (1-\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)} + i$$

$$+ \ln(r) \cdot \frac{a^2 M_1}{D(1-\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)} + i$$

$$\begin{aligned}
& +r^2 \cdot \frac{M_1}{2D(1+\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)} = \dot{\epsilon} \\
& \frac{-a^2 b^2 M_1}{2D(a^2 - b^2)} \cdot \frac{2 \ln(a) \cdot (1+\mu) + (1-\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)} + \dot{\epsilon} \\
& \frac{+a^2 b^2 M_1 \ln(r)}{D(1-\mu) \cdot (a^2 - b^2)} + \frac{r^2 b^2 M_1}{2D(1+\mu) \cdot (a^2 - b^2)} = \dot{\epsilon} \\
& \dot{\epsilon} - \frac{a^2 b^2 M_1}{2D(a^2 - b^2)} \cdot \frac{2 \ln(a)}{(1-\mu)} + \frac{a^2 b^2 M_1 \ln(r)}{D(1-\mu)(a^2 - b^2)} + \frac{a^2 b^2 M_1}{2D(a^2 - b^2)(1+\mu)} + \dot{\epsilon} \\
& \frac{+r^2 b^2 M_1}{2D(1+\mu) \cdot (a^2 - b^2)} = \dot{\epsilon} \\
& \dot{\epsilon} - \frac{b^2 M_1}{2D(a^2 - b^2)(1+\mu)} \cdot (a^2 - r^2) + \frac{a^2 b^2 M_1 \ln\left(\frac{r}{a}\right)}{D(a^2 - b^2)(1-\mu)}.
\end{aligned}$$

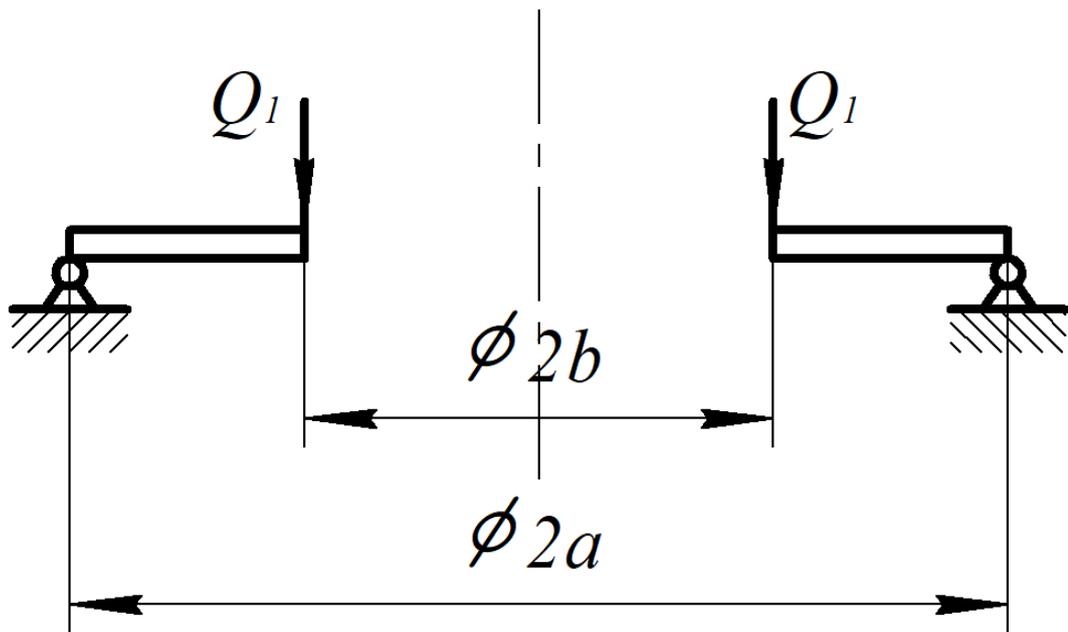


Рисунок 2 – $\dot{\epsilon}$ Вторая часть расчетной схемы.

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 запишем четыре граничных условия:

1. $r=b Q = \frac{q\pi b^2}{2\pi b} = \frac{qb}{2}$ – условие нагружения ;
2. $r=a w=0$ – прогиб на опоре ;
3. $r=a M_r=0$ – условие закрепления ;
4. $r=b M_r=0$ – условие нагружения .

$$Q_r = \frac{4DC_4}{r}.$$

Из 1-го граничного условия $\left(r=b; Q = \frac{qb}{2}\right)$ получим:

$$\frac{4DC_4}{r} = \frac{qb}{2} \Rightarrow C_4 = \frac{qb^2}{8D};$$

$$M_r = -D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = i$$

$$i - D \left[\left(2C_3 - \frac{C_2}{r^2} + C_4(2\ln(r)+3) \right) + \frac{\mu}{r} \cdot \left(\frac{C_2}{r} + 2C_3r + rC_4(2\ln(r)+1) \right) \right] = i$$

$$i - D \left[\frac{-C_2}{r^2}(1-\mu) + 2C_3(1+\mu) + C_4(2\ln(r)(1+\mu)+3+\mu) \right].$$

Из 3-го $(r=a; M_r=0)$ и 4-го $(r=b; M_r=0)$ граничных условий получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -D \left[\frac{-C_2}{a^2}(1-\mu) + 2C_3(1+\mu) + C_4(2\ln(a)(1+\mu)+3+\mu) \right] = 0 \\ -D \left[\frac{-C_2}{b^2}(1-\mu) + 2C_3(1+\mu) + C_4(2\ln(b)(1+\mu)+3+\mu) \right] = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{-C_2}{a^2}(1-\mu) + 2C_3(1+\mu) + \frac{qb^2}{8D}(2\ln(a)(1+\mu)+3+\mu) = 0 \\ \frac{-C_2}{b^2}(1-\mu) + 2C_3(1+\mu) + \frac{qb^2}{8D}(2\ln(b)(1+\mu)+3+\mu) = 0 \end{cases}.$$

Вычтем из 2-го уравнения 1-ое и получим:

$$\frac{-C_2}{a^2}(1-\mu) + \frac{C_2}{b^2}(1-\mu) + \frac{qb^2}{8D} \cdot 2(1+\mu) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 0;$$

$$-C_2(1-\mu) \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2b^2} + \frac{qb^2}{8D} \cdot 2(1+\mu) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 0;$$

$$C_2 = \frac{qb^2}{4D} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Подставив C_2 в первое уравнение, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{-(1-\mu)}{a^2} \cdot \frac{qb^2}{4D} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) + i \\ & + 2C_3(1+\mu) + \frac{qb^2}{8D} (2\ln(a)(1+\mu) + 3+\mu) = 0; \\ 2C_3(1+\mu) & = \frac{qb^2}{4D} \cdot \frac{1+\mu}{a^2} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{qb^2}{8D} (2\ln(a)(1+\mu) + 3+\mu); \\ C_3 & = \frac{qb^4}{8D(a^2-b^2)} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{qb^2\ln(a)}{8D} - \frac{qb^2}{16D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu}. \end{aligned}$$

Подставляем постоянные C_2 , C_3 и C_4 в уравнение прогиба с учетом 2-го граничного условия ($r=a; w=0$):

$$\begin{aligned} C_1 + \frac{qb^2}{4D} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ln(a) + \frac{qb^4}{8D} \cdot \frac{a^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) - i \\ - \frac{qa^2b^2\ln(a)}{8D} - \frac{qa^2b^2}{16D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} + \frac{qb^2}{8D} a^2 \ln(a) = 0; \\ C_1 = \frac{qb^2}{4D} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ln(a) - \frac{qa^2b^4}{8D(a^2-b^2)} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) + i \\ + \frac{qa^2b^2}{16D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu}. \end{aligned}$$

Уравнение наклона:

$$\begin{aligned} w' = \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{qb^2}{4D} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) + i \\ + 2r \left[\frac{qb^4}{8D(a^2-b^2)} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{qb^2\ln(a)}{8D} - \frac{qb^2}{16D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} \right] + \frac{qb^2}{8D} \cdot r(2\ln(r)+1). \end{aligned}$$

Уравнение прогиба:

$$\begin{aligned} w = \frac{-qb^2}{4D} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ln(a) - \frac{qb^4}{8D} \cdot \frac{a^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) + i \\ + \frac{qa^2b^2}{16D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} + \frac{qb^2}{4D} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ln(r) + i \\ + r^2 \left[\frac{qb^4}{8D(a^2-b^2)} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{qb^2\ln(a)}{8D} - \frac{qb^2}{16D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} \right] + \frac{qb^2}{8D} \cdot r^2 \ln(r) = i i \\ i \frac{qb^2}{4D} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{qb^4}{8D(a^2-b^2)} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot (a^2-r^2) + i i \end{aligned}$$

$$\frac{+qb^2}{16D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot (a^2-r^2) + \frac{qb^2}{8D} \cdot r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) = \ddot{w}$$

$$\ddot{w} = \frac{qb^2}{8D}$$

$$\left[\frac{-b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) (a^2-r^2) \right]$$

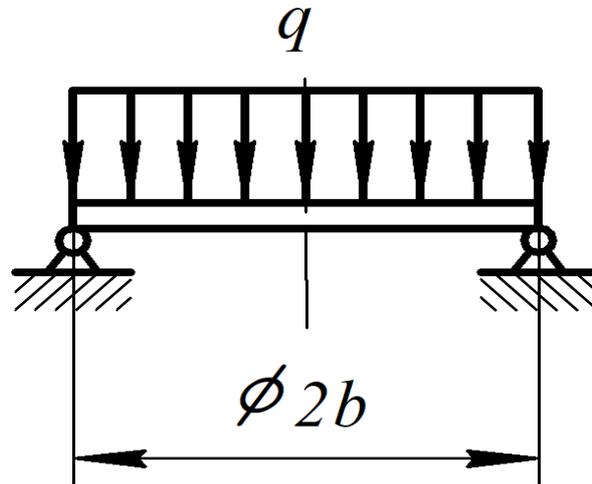


Рисунок 3 – Третья часть расчетной схемы.

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 запишем четыре граничных условия:

1. $r=b; Q = \frac{qb}{2}$ – реакция в опоре ;
2. $r=b; w=0$ – прогиб на опоре ;
3. $r=b; M_r=0$ – условие нагружения ;
4. $r=0; w'=0$ – угол поворота в центре.

$$Q_r = \frac{4DC_4}{r}$$

Из 1-го граничного условия $\left(r=b; Q = \frac{qb}{2}\right)$ получим:

$$\frac{4DC_4}{r} = \frac{qb}{2} \Rightarrow C_4 = \frac{qb^2}{8D}$$

Уравнение наклона с учетом 4-го граничного условия $(r=0; w'=0)$:

$$\frac{C_2}{0} + 2C_3 \cdot 0 + C_4 \cdot 0 \cdot (2 \ln(0) + 1) = 0, \text{ отсюда } C_2 = 0.$$

Уравнение момента:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} - D \left[\left(\frac{-C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln(r) + 3) \right) + \frac{\mu}{r} \left(\frac{C_2}{r} + 2C_3 r + r C_4(2 \ln(r) + 1) \right) \right] = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} - D \left[\frac{-C_2}{r^2} \cdot (1 - \mu) + 2C_3(1 + \mu) + C_4(2 \ln(r)(1 + \mu) + 3 + \mu) \right].$$

С учетом 3-го граничного условия ($r = b; M_r = 0$) и известных C_2 и C_4 :

$$-D \left[\frac{-0}{r^2} \cdot (1 - \mu) + 2C_3(1 + \mu) + \frac{q b^2}{8D} (2 \ln(b)(1 + \mu) + 3 + \mu) \right] = 0;$$

$$2C_3(1 + \mu) = \frac{-q b^2}{8D} (2 \ln(b)(1 + \mu) + 3 + \mu);$$

$$C_3 = \frac{-q b^2}{16D} \left(2 \ln(b) + \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right).$$

Запишем уравнение прогиба с учетом 2-го граничного условия ($r = b; w = 0$) и найденных C_2, C_3 и C_4 и найдем C_1 :

$$C_1 + 0 \cdot \ln(b) - \frac{q b^4}{16D} \left(2 \ln(b) + \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right) + \frac{q b^2}{8D} \cdot \ln(b) = 0;$$

$$C_1 - \frac{q b^4}{8D} \cdot \ln(b) + \frac{q b^4}{8D} \cdot \ln(b) - \frac{q b^4}{16D} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu} = 0;$$

$$C_1 = \frac{q b^4}{16D} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu}.$$

Уравнение наклона:

$$w' = \frac{dw}{dr} = \frac{0}{r} + 2r \left[\frac{-q b^2}{16D} \left(2 \ln(b) + \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right) \right] + \frac{q b^2}{8D} \cdot r (2 \ln(r) + 1) = \dot{\epsilon}$$

$$\frac{-q b^2 r}{16D} \cdot 2 \ln(b) - \frac{q b^2 r}{16D} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu} + \frac{q b^2 r}{8D} \cdot 2 \ln(r) + \frac{q b^2 r}{8D} = \dot{\epsilon}$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} \frac{q b^2 r}{8 D} \left[-2 \ln(b) + 2 \ln(r) + 1 - \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right] &= \frac{q b^2 r}{8 D} \left[2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{2}{1 + \mu} \right] = \dot{\epsilon} \\ &\dot{\epsilon} \frac{q b^2 r}{4 D} \left[\ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{1}{1 + \mu} \right]. \end{aligned}$$

Уравнение прогиба:

$$\begin{aligned} w &= \frac{q b^4}{16 D} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu} + 0 \cdot \ln(r) - \frac{q b^2 r^2}{16 D} \left(2 \ln(b) + \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right) + \frac{q b^2 r^2}{8 D} \cdot \ln(r) = \dot{\epsilon} \\ &\dot{\epsilon} \frac{q b^4}{16 D} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu} - \frac{q b^2 r^2}{16 D} \cdot 2 \ln(b) - \frac{q b^2 r^2}{16 D} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu} + \frac{q b^2 r^2}{8 D} \cdot \ln(r) = \dot{\epsilon} \\ &\dot{\epsilon} \frac{q b^2}{16 D} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \cdot (b^2 - r^2) + \frac{q b^2 r^2}{8 D} \cdot \ln\left(\frac{r}{b}\right). \end{aligned}$$

Уравнение наклона на внутренней границе от момента M_1 :

$$\left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=b} = \frac{a^2 b^2 M_1}{D(1 - \mu) \cdot (a^2 - b^2)} \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right).$$

Уравнение наклона на внутренней границе от силы Q_1 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=b} &= \frac{1}{b} \cdot \frac{q b^2}{4 D} \cdot \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \dot{\epsilon} \\ + 2b &\left[\frac{q b^4}{8 D (a^2 - b^2)} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{q b^2 \ln(a)}{8 D} - \frac{q b^2}{16 D} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \right] + \frac{q b^2}{8 D} \cdot b (2 \ln(b) + 1) = \dot{\epsilon} \\ &\dot{\epsilon} \frac{q b^2}{4 D} \dot{\epsilon} \\ &\frac{+b}{2} (2 \ln(b) + 1) \dot{\epsilon} \\ &\dot{\epsilon} \frac{q b^3}{4 D} \dot{\epsilon} \\ &\frac{+1}{2} \dot{\epsilon} \\ &\dot{\epsilon} \frac{q b^3}{8 D} \dot{\epsilon} \\ &+ 1 \dot{\epsilon} \\ &\dot{\epsilon} \frac{q b^3}{8 D} \dot{\epsilon} \end{aligned}$$

Уравнение наклона на внутренней границе от силы q :

$$\left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=b} = \frac{q b^3}{4 D} \cdot \left(\ln\left(\frac{b}{b}\right) - \frac{1}{1 + \mu} \right) = \frac{-q b^3}{4 D (1 + \mu)}.$$

В следствие того, что внутренняя часть пластинки изогнута по сферической поверхности, наклон на границе будет равен:

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = \frac{-M_1 b}{D(1+\mu)}.$$

Из этих 4-х уравнений получим M_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 b^2 M_1}{D(1-\mu) \cdot (a^2 - b^2)} \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu}\right) + \dot{\epsilon} \\ & \quad + \frac{q b^3}{8D} \dot{\epsilon} \\ & \dot{\epsilon} - \frac{M_1 b}{D(1+\mu)} - \frac{q b^3}{4D(1+\mu)}; \\ & \frac{M_1 b}{D(1+\mu)} \left[\frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} + \frac{b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1-\mu}{1-\mu} + 1 \right] = \dot{\epsilon} \\ & \quad \dot{\epsilon} - \frac{q b^3}{8D} \dot{\epsilon} \\ & \frac{M_1}{1+\mu} \left[\frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} + \frac{b^2}{a^2 - b^2} + 1 \right] = \dot{\epsilon} \\ & \quad \dot{\epsilon} - \frac{q b^2}{8} \dot{\epsilon} \\ & \quad \left. \frac{+2 - 1(1+\mu) - (1-\mu)}{1+\mu} \right]; \\ & \quad \frac{M_1}{1+\mu} \dot{\epsilon} \\ & \dot{\epsilon} - \frac{q b^2}{8} \cdot 2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \left[1 + \frac{b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \right]; \\ & M_1 = \frac{-q b^2 (1+\mu)}{4} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Подставив значение M_1 в уравнение прогиба от M_1 и сложив с уравнением прогиба от силы Q_1 , получим уравнение прогиба на участке $b < r < a$:

$$w_{r>b} = \left[\frac{-b^2 \cdot (a^2 - r^2)}{2D(a^2 - b^2)(1+\mu)} + \frac{a^2 b^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right)}{D(a^2 - b^2)(1-\mu)} \right] \cdot \left(\frac{-q b^2 (1+\mu)}{4} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right) + \dot{\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{+qb^2}{8D} \cdot \left[\frac{-b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot (a^2-r^2) \right] = \dots \\
& \dots \frac{qb^2}{8D} \cdot b^2 \cdot \frac{a^2-r^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{1+\mu}{1+\mu} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{qb^2}{8D} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{2a^2b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \dots \\
& \dots \frac{+qb^2}{8D} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{2a^2b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \dots \frac{qb^2}{8D} \cdot r^2 \cdot \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \dots \\
& \dots \frac{+qb^2}{8D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{a^2-r^2}{2} - \frac{qb^2}{8D} \cdot \frac{b^2}{a^2-b^2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) (a^2-r^2) = \dots \\
& \dots \frac{qb^2}{8D} \cdot r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{qb^2}{8D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{a^2-r^2}{2} = \dots \\
& \dots \frac{qb^2}{16D} \left[2r^2 \cdot \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot (a^2-r^2) \right].
\end{aligned}$$

Подставив в уравнение прогиба на участке $b < r < a$ значение $r=b$, получим прогиб под нагрузкой:

$$w_{r=b} = \frac{qb^2}{16D} \left[2b^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot (a^2-b^2) \right].$$

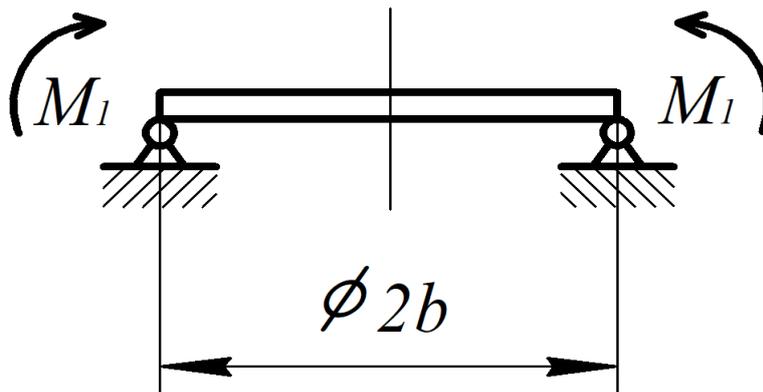


Рисунок 4 – Четвертая часть расчетной схемы.

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 запишем четыре граничных условия:

1. $r=b, w=0$ – прогиб на опоре;
2. $r=b, M_r = M_1$ – условие нагружения;

3. $r=0 Q=0$ – условие нагружения;
4. $r=0 w'=0$ – угол поворота в центре.

Определим поперечную силу:

$$Q_r = D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = D \left[\frac{+1}{r} \left(\frac{-C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln(r) + 3) \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{C_2}{r} + 2C_3 r + r C_4(2 \ln(r) + 1) \right) \right] =$$

$$D \left[\frac{2C_2}{r^3} + \frac{2C_4}{r} - \frac{C_2}{r^3} + \frac{2C_3}{r} + \frac{C_4(2 \ln(r) + 3)}{r} - \frac{C_2}{r^3} - \frac{2C_3}{r} - \frac{C_4(2 \ln(r) + 1)}{r} \right] =$$

$$D \left[\frac{2C_4 + 2C_4 \ln(r) + 3C_4 - 2C_4 \ln(r) - C_4}{r} \right] = \frac{4DC_4}{r}.$$

Из 3-го граничного условия ($r=b; Q=0$) получим:

$$Q = \frac{4DC_4}{b} = 0 \text{ и } C_4 = 0.$$

Запишем уравнение угла поворота с учетом 4-го условия ($r=0; w=0$):

$$\frac{C_2}{0} + 2C_3 \cdot 0 + C_4 \cdot 0 \cdot (2 \ln(0) + 1) = 0, \text{ отсюда } C_2 = 0.$$

Изгибающий момент в окружном сечении:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = -D \left[\left(\frac{-C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln(r) + 3) \right) + \frac{\mu}{r} \left(\frac{C_2}{r} + 2C_3 r + r C_4(2 \ln(r) + 1) \right) \right] =$$

$$-D [2C_3(1 + \mu)].$$

Из 2-го граничного условия ($r=b; M_r = M_1$) с учетом величины M_1 определим C_3 :

$$M_r = -D [2C_3(1 + \mu)] = M_1 = \frac{-q b^2 (1 + \mu)}{4} \cdot \ln \left(\frac{b}{a} \right);$$

$$C_3 = \frac{q b^2}{8D} \cdot \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Запишем уравнение прогиба с учетом 1-го граничного условия ($r=b; w=0$) и найденных C_2, C_3 и C_4 , найдем C_1 :

$$w = C_1 + C_2 \cdot \ln(b) + C_3 \cdot b^2 + C_4 \cdot b^2 \cdot \ln(b) = C_1 + C_3 \cdot b^2 = 0;$$

$$C_1 = -C_3 b^2 = \frac{-q b^4}{8D} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Уравнение прогиба центральной части:

$$w = \frac{-q b^4}{8D} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{q b^2 r^2}{8D} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{q b^2}{8D} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) (r^2 - b^2).$$

Прибавив полученное уравнение прогиба к прогибу под нагрузкой, получим уравнение прогиба на участке $r < b$:

$$w_{r < b} = \frac{q b^2}{16D} \left[2r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot (a^2 - r^2) \right] + \frac{q b^2}{8D} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) (r^2 - b^2) = i$$

$$i \frac{q b^2}{16D} \left[2r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot (a^2 - r^2) + 2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) (r^2 - b^2) \right].$$

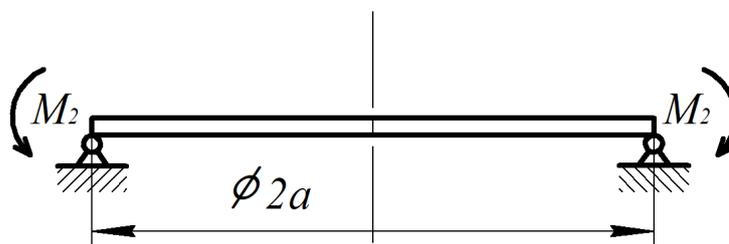


Рисунок 5 – *i* Пятая часть расчетной схемы.

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 запишем четыре граничных условия:

1. $r = a w = 0$ – прогиб на опоре;
2. $r = a Q = 0$ – условие нагружения;
3. $r = 0 w' = 0$ – угол наклона в центре;
4. $r = a M_r = M_2$ – условие нагружения.

В следствие того, что контур заземлен, то наклон на контуре пластинки обращается в ноль.

Наклон, вызванный моментом M_2 , на контуре:

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \frac{M_2 a}{D(1+\mu)}.$$

Для определения наклона на контуре свободно опертой пластины найдем производную уравнения прогиба участка $r > b$:

$$\begin{aligned} (w')_{r>b} &= \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r>b} = \left(\frac{qb^2}{16D} \left[2r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot (a^2 - r^2) \right]\right)' = i \\ i \cdot \frac{qb^2}{16D} \left[2r + 4r \ln\left(\frac{r}{a}\right) - 2r \left(\frac{3+\mu}{1+\mu}\right) \right] &= \frac{qb^2 r}{8D} \left[2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + 1 - \left(\frac{3+\mu}{1+\mu}\right) \right]; \\ \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} &= \frac{qb^2 a}{8D} \left[2 \ln\left(\frac{a}{a}\right) + 1 - \left(\frac{3+\mu}{1+\mu}\right) \right] = \frac{-qb^2 a}{4D(1+\mu)}. \end{aligned}$$

Приравниваем наклоны:

$$\begin{aligned} \frac{M_2 a}{D(1+\mu)} &= \frac{-qb^2 a}{4D(1+\mu)}; \\ M_2 &= \frac{-qb^2}{4}. \end{aligned}$$

Из 2-го граничного условия ($r=a; Q=0$) получим:

$$Q_r = \frac{4DC_4}{r} = 0 \text{ и } C_4 = 0.$$

Уравнение угла наклона с учетом 3-го граничного условия ($r=0; w'=0$) и найденного C_4 :

$$(w')_{r=0} = \frac{C_2}{0} + 2C_3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot (2 \ln(0) + 1) = 0, \text{ отсюда } C_2 = 0.$$

Изгибающий момент в окружном сечении с учетом найденных C_2 и C_4 :

$$M_r = -D \cdot 2C_3(1+\mu).$$

С учетом 4-го граничного условия ($r=a; M_r = M_2$) получим:

$$-D \cdot 2C_3(1+\mu) = M_2 \text{ и } C_3 = \frac{-M_2}{2D(1+\mu)}.$$

Подставляем значение M_2 :

$$C_3 = \frac{-qb^2}{4} \cdot \left(\frac{-1}{2D(1+\mu)}\right) = \frac{qb^2}{8D(1+\mu)}.$$

Уравнение прогиба с учетом 1-го граничного условия ($r=a; w=0$) и найденных C_2, C_3 , и C_4 :

$$(w)_{r=a} = C_1 + C_3 a^2;$$

$$C_1 + \frac{q b^2 a^2}{8 D (1 + \mu)} = 0 \quad C_1 = \frac{-q b^2 a^2}{8 D (1 + \mu)}.$$

Уравнение прогиба от момента M_2 :

$$w = \frac{-q b^2 a^2}{8 D (1 + \mu)} + \frac{q b^2 r^2}{8 D (1 + \mu)} = q b^2 \frac{(r^2 - a^2)}{8 D (1 + \mu)} = -q b^2 \frac{(a^2 - r^2)}{8 D (1 + \mu)}.$$

Складываем прогибы от M_2 и $(w)_{r>b}$:

$$w = \frac{q b^2}{16 D} \left[2 r^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) + \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \cdot (a^2 - r^2) \right] - q b^2 \frac{(a^2 - r^2)}{8 D (1 + \mu)} =$$

$$\frac{q b^2}{16 D} \left[2 r^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) + \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \cdot (a^2 - r^2) - 2 \cdot \frac{a^2 - r^2}{1 + \mu} \right] =$$

$$\frac{q b^2}{16 D} \left[2 r^2 \cdot \ln \left(\frac{r}{a} \right) + \frac{a^2 - r^2}{1 + \mu} \cdot (3 + \mu - 2) \right] = \frac{q b^2}{16 D} \left[2 r^2 \cdot \ln \left(\frac{r}{a} \right) + (a^2 - r^2) \right].$$

Складываем прогибы от M_2 и $(w)_{r<b}$:

$$w = \frac{q b^2}{16 D} \left[2 r^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) + \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \cdot (a^2 - r^2) + 2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) (r^2 - b^2) \right] -$$

$$- q b^2 \frac{(a^2 - r^2)}{8 D (1 + \mu)} =$$

$$\frac{q b^2}{16 D} \left[2 r^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) + 2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) (r^2 - b^2) + \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \cdot (a^2 - r^2) - 2 \cdot \frac{a^2 - r^2}{1 + \mu} \right] =$$

$$\frac{q b^2}{16 D} \left[2 r^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) + (a^2 - r^2) + 2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) (r^2 - b^2) \right].$$

Определение распределенного изгибающего момента M_r в окружных сечениях пластины на участке $b < r < a$:

$$M_r = M_r(M_1) + M_r(Q_1) + M_r(M_2).$$

$$M_r(M_1) = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) \quad - \quad \text{уравнение изгибающего момента}$$

характерного для схемы, изображенной на рисунке 3. Подставляем в уравнение постоянные C_2 , C_3 и C_4 , ранее определенные для данной схемы:

$$M_r(M_1) = -D$$

$$\frac{+\mu}{r} \left(\frac{C_2}{r} + 2C_3 r + rC_4(2\ln(r)+1) \right) = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} - D \left[\frac{-C_2}{r^2} + \frac{\mu C_2}{r^2} + 2C_3 + 2C_3 \mu \right] = D \left[C_2 \cdot \frac{1-\mu_2}{r^2} - 2C_3(1+\mu) \right] = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} D \left[\frac{a^2 \cdot M_1 \cdot b^2}{D(1-\mu) \cdot (a^2-b^2)} \cdot \frac{1-\mu_2}{r^2} - \frac{M_1 \cdot b^2}{2D(1+\mu) \cdot (a^2-b^2)} \cdot 2(1+\mu) \right] = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} M_1 \left[\frac{a^2 b^2}{r^2(a^2-b^2)} - \frac{b^2}{a^2-b^2} \right] = M_1 \cdot \frac{b^2}{r^2} \cdot \frac{a^2-r^2}{a^2-b^2} = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} - \frac{qb^2(1+\mu)}{4} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{b^2}{r^2} \cdot \frac{a^2-r^2}{a^2-b^2}$$

$$M_r(Q_1) = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) \quad - \quad \text{уравнение изгибающего момента}$$

характерного для схемы с силой Q_1 , изображенной на рисунке 4. Подставляем в уравнение постоянные C_2 , C_3 и C_4 , ранее определенные для данной схемы:

$$M_r(Q_1) = -D \left[\frac{-C_2}{r^2} (1-\mu) + 2C_3(1+\mu) + C_4(2\ln(r)(1+\mu) + 3+\mu) \right] = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} - D \dot{\epsilon}$$

$$-2(1+\mu) \cdot \frac{qb^2 \cdot \ln(a)}{8D} - 2(1+\mu) \cdot \frac{qb^2}{16D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} + \dot{\epsilon}$$

$$\frac{+qb^2}{8D} (2\ln(r)(1+\mu) + 3+\mu) \Big] = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} - D \dot{\epsilon}$$

$$\frac{+qb^2}{4D} \cdot \ln(r) \cdot (1+\mu) - \frac{qb^2}{8D} \cdot (3+\mu) + \frac{qb^2}{8D} (3+\mu) \Big] = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} \frac{qb^2}{4} \left[\frac{b^2}{a^2-b^2} \cdot (1+\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) + (1+\mu) \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right]$$

$$M_r(M_2) = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) \quad - \quad \text{уравнение изгибающего момента}$$

характерного для схемы, изображенной на рисунке 7. Подставляем в уравнение постоянные C_2 , C_3 и C_4 , ранее определенные для данной схемы:

$$M_r(M_2) = -D \dot{\epsilon}$$

$$\frac{+\mu}{r} \left(\frac{C_2}{r} + 2C_3 r + rC_4(2\ln(r)+1) \right) = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} - D[2C_3 + 2C_3\mu] = -D2C_3(1+\mu) = -2D(1+\mu) \cdot \frac{qb^2}{8D(1+\mu)} = \frac{-qb^2}{4};$$

$$(M_r)_{r>b} = \frac{-qb^2(1+\mu)}{4} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{b^2}{r^2} \cdot \frac{a^2-r^2}{a^2-b^2} + \dot{\epsilon}$$

$$+ \frac{qb^2}{4} \left[\frac{b^2}{a^2-b^2} \cdot (1+\mu) \cdot \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) + (1+\mu) \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right] - \frac{qb^2}{4}.$$

Момент в центральной части:

$$M_r = M_1 + M_2 + M_r(q).$$

$$M_r(q) = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) - \text{уравнение изгибающего момента характерного}$$

для схемы, изображенной на рисунке 5. Подставляем в уравнение постоянные C_2 , C_3 и C_4 , ранее определенные для данной схемы:

$$M_r(q) = -D \dot{\epsilon}$$

$$\frac{+\mu}{r} \left(\frac{C_2}{r} + 2C_3 r + rC_4(2\ln(r)+1) \right) = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} - D \dot{\epsilon}$$

$$+ \mu \left[\frac{-qb^2}{8D} \left(2\ln(b) + \frac{3+\mu}{1+\mu} \right) + \frac{qb^2\mu}{8D} \cdot (2\ln(r)+1) \right] = \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} \frac{qb^2}{8} \cdot 2\ln(b) + \frac{qb^2}{8} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} - \dot{\epsilon}$$

$$\frac{-qb^2}{8} \cdot 2\ln(r) - \frac{qb^2}{8} \cdot 3 + \frac{qb^2}{8} \cdot \frac{\mu(3+\mu)}{1+\mu} + \dot{\epsilon}$$

$$\frac{+qb^2}{8} \cdot 2\mu \ln(b) - \frac{qb^2}{8} \cdot 2\mu \ln(r) - \dot{\epsilon} \frac{qb^2\mu}{8} = \dot{\epsilon} \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} \frac{qb^2}{8} \cdot 2\ln\left(\frac{b}{r}\right) + \frac{qb^2}{8} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot (1+\mu) - \frac{qb^2}{8} \cdot (3+\mu) + \frac{qb^2}{8} \cdot 2\mu \ln\left(\frac{b}{r}\right) = \dot{\epsilon} \dot{\epsilon}$$

$$\dot{\epsilon} \frac{qb^2}{4} \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right) \cdot (1+\mu);$$

$$(M_r)_{r \leq b} = \frac{-qb^2}{4} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot (1+\mu) - \frac{qb^2}{4} + \frac{qb^2}{4} \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right) \cdot (1+\mu) = \dot{\epsilon}$$

$$\begin{aligned} \dot{\iota} \frac{qb^2}{4} [(1+\mu) \cdot (\ln(b) - \ln(r) - \ln(b) + \ln(a)) - 1] &= \dot{\iota} \\ \dot{\iota} \frac{qb^2}{4} \left[\ln\left(\frac{a}{r}\right) \cdot (1+\mu) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Определим распределенный изгибающий момент M_θ в радиальных сечениях пластины на участке $b < r < a$:

$$(M_\theta)_{b < r < a} = M_\theta(M_1) + M_\theta(Q_1) + M_\theta(M_2).$$

$$M_\theta(M_1) = -D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \quad - \quad \text{уравнение изгибающего момента}$$

характерного для схемы, изображенной на рисунке 3. Подставляем в уравнение постоянные C_2 , C_3 и C_4 , ранее определенные для данной схемы:

$$\begin{aligned} M_\theta(M_1) &= -D \dot{\iota} \\ &+ \mu \left(\frac{-C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln(r) + 3) \right) \Big] = \dot{\iota} \\ \dot{\iota} - D \left[\frac{C_2}{r^2} - \frac{C_2 \mu}{r^2} + 2C_3 + 2C_3 \mu \right] &= -D \left[C_2 \cdot \frac{1-\mu}{r^2} + 2C_3(1+\mu) \right] = \dot{\iota} \\ \dot{\iota} - D \left[\frac{a^2 M_1 b^2}{D(1-\mu) \cdot (a^2 - b^2)} \cdot \frac{1-\mu}{r^2} + \frac{M_1 b^2 2(1+\mu)}{2D(1+\mu) \cdot (a^2 - b^2)} \right] &= \dot{\iota} \\ \dot{\iota} - D \left[\frac{a^2 b^2}{r^2 \cdot (a^2 - b^2)} + \frac{b^2}{a^2 - b^2} \right] &= -M_1 \cdot \frac{b^2 \cdot (a^2 + r^2)}{r^2 \cdot (a^2 - b^2)} = \dot{\iota} \\ \dot{\iota} \frac{qb^2}{4} (1+\mu) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{b^2 \cdot (a^2 + r^2)}{r^2 \cdot (a^2 - b^2)}. \end{aligned}$$

$$M_\theta(Q_1) = -D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \quad - \quad \text{уравнение изгибающего момента}$$

характерного для схемы, изображенной на рисунке 4, подставляем в уравнение постоянные C_2 , C_3 и C_4 , ранее определенные для данной схемы:

$$\begin{aligned} M_\theta(Q_1) &= -D \dot{\iota} \\ &+ 2(1+\mu) \cdot \frac{qb^4}{8D(a^2 - b^2)} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2(1+\mu) \cdot \frac{qb^2 \cdot \ln(a)}{8D} - \dot{\iota} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(1+\mu) \cdot \frac{qb^2}{16D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} + \frac{qb^2}{8D} (2 \ln(r)(1+\mu) + 3\mu + 1) \Big] = \dot{\epsilon} \\
\dot{\epsilon} - \frac{qb^2}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2 - b^2} \cdot (1+\mu) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right) + \frac{qb^2}{4} \cdot (1+\mu) \cdot \ln(a) + \dot{\epsilon} \\
& + \frac{qb^2}{8} (3+\mu - 3\mu - 1 - 2 \ln(r) \cdot (1+\mu)) = \dot{\epsilon} \\
\dot{\epsilon} \frac{qb^2}{4} \left[(1-\mu) + (1+\mu) \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{b^2}{a^2 - b^2} \cdot (1+\mu) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right) \right].
\end{aligned}$$

$$M_\theta(M_2) = -D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2w}{dr^2} \right) \quad - \quad \text{уравнение изгибающего момента}$$

характерного для схемы, изображенной на рисунке 7. Подставляем в уравнение постоянные C_2 , C_3 и C_4 , ранее определенные для данной схемы:

$$\begin{aligned}
M_\theta(M_2) &= -D \dot{\epsilon} \\
& + \mu \left(\frac{-C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln(r) + 3) \right) \Big] = \dot{\epsilon} \\
\dot{\epsilon} - D[2C_3 + 2C_3\mu] &= -D \cdot 2C_3(1+\mu) = -2D(1+\mu) \cdot \frac{qb^2}{8D(1+\mu)} = \frac{-qb^2}{4}; \\
(M_\theta)_{r>b} &= \frac{qb^2}{4} (1+\mu) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{b^2 \cdot (a^2 + r^2)}{r^2 \cdot (a^2 - b^2)} + \dot{\epsilon} \\
& + \frac{qb^2}{4} \left[(1-\mu) + (1+\mu) \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{b^2}{a^2 - b^2} \cdot (1+\mu) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right) \right] - \frac{qb^2}{4}.
\end{aligned}$$

Момент в центральной части:

$$M_\theta = M_1 + M_2 + M_\theta(q).$$

$$M_\theta(q) = -D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2w}{dr^2} \right) \quad - \quad \text{уравнение изгибающего момента}$$

характерного для схемы, изображенной на рисунке 5. Подставляем в уравнение постоянные C_2 , C_3 и C_4 , определенные для данной схемы:

$$\begin{aligned}
M_\theta(q) &= -D \dot{\epsilon} \\
& + \mu \left(\frac{-C_2}{r^2} + 2C_3 + C_4(2 \ln(r) + 3) \right) \Big] = \dot{\epsilon} \\
\dot{\epsilon} - D[2C_3 + C_4(2 \ln(r) + 1) + 2C_3\mu + C_4\mu(2 \ln(r) + 3)] &= \dot{\epsilon}
\end{aligned}$$

$$\dot{\iota} - D \left[2 C_3 (1 + \mu) + C_4 (2 \ln(r) + 1 + 2 \ln(r) \mu + 3 \mu) \right] = \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} - D \left[2 C_3 (1 + \mu) + C_4 (2 \ln(r) \cdot (1 + \mu) + 3 \mu + 1) \right] = \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} - D \dot{\iota}$$

$$\frac{+ q b^2}{8 D} \cdot (2 \ln(r) \cdot (1 + \mu) + 3 \mu + 1) \Big] = \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} \frac{q b^2}{8} \cdot 2 \ln(b) (1 + \mu) + \frac{q b^2}{8} \cdot \frac{3 + \mu}{1 + \mu} \cdot (1 + \mu) - \dot{\iota}$$

$$\frac{- q b^2}{8} \cdot 2 \ln(r) \cdot (1 + \mu) - \frac{q b^2}{8} (3 \mu + 1) = \dot{\iota} \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} \frac{q b^2}{8} \cdot 2 \ln\left(\frac{b}{r}\right) (1 + \mu) + \frac{q b^2}{8} \cdot (3 + \mu - 3 \mu - 1) = \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} \frac{q b^2}{4} \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right) (1 + \mu) + \frac{q b^2}{4} \cdot (1 - \mu) = \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} \frac{q b^2}{4} \left[\ln\left(\frac{b}{r}\right) (1 + \mu) + (1 - \mu) \right];$$

$$(M_\theta)_{r \leq b} = \frac{- q b^2}{4} (1 + \mu) \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{q b^2}{4} + \frac{q b^2}{4} \left[\ln\left(\frac{b}{r}\right) (1 + \mu) + (1 - \mu) \right] = \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} \frac{q b^2}{4} \left[(1 + \mu) (\ln(b) - \ln(r) - \ln(b) + \ln(a)) + 1 - \mu - 1 \right] = \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} \frac{q b^2}{4} \left[\ln\left(\frac{a}{r}\right) \cdot (1 + \mu) - \mu \right].$$

Функции прогиба срединной поверхности при $b = 0,5 a$:

$$w_{r > b} = \frac{q \cdot 0,25 a^2}{16 D} \left[2 r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + (a^2 - r^2) \right] = \frac{q a^2}{64 D} \left[2 r^2 \cdot \ln\left(\frac{r}{a}\right) + (a^2 - r^2) \right];$$

$$w_{r = b} = \frac{q \cdot 0,25 a^2}{16 D} \left[2 \cdot 0,25 a^2 \ln\left(\frac{0,5 a}{a}\right) + a^2 - 0,25 a^2 \right] = \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} \frac{q a^2}{64 D} \left[0,5 a^2 \cdot \ln(0,5) + 0,75 a^2 \right] = \frac{q a^4}{64 D} \left[0,5 \cdot \ln(0,5) + 0,75 \right];$$

$$w_{r < b} = \frac{q \cdot 0,25 a^2}{16 D} \left[2 r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + (a^2 - r^2) + 2 \ln\left(\frac{0,5 a}{a}\right) (r^2 - 0,25 a^2) \right] = \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} \frac{q a^2}{64 D} \left[2 r^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + (a^2 - r^2) + 2 \ln(0,5) (r^2 - 0,25 a^2) \right].$$

Функции распределенного изгибающего момента M_r при

$b=0,5a, \mu=0,31$:

$$\begin{aligned}
 (M_r)_{r>b} &= \frac{-q \cdot 0,25a^2(1+0,31)}{4} \cdot \ln\left(\frac{0,5a}{a}\right) \cdot \frac{0,25a^2}{r^2} \cdot \frac{a^2-r^2}{a^2-0,25a^2} + i \\
 &\quad + \frac{q \cdot 0,25a^2}{4} i \\
 &+ (1+0,31) \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{q \cdot 0,25a^2}{4} = \frac{qa^2}{16} \cdot 1,31 \cdot \ln(0,5) \cdot \frac{0,25a^2}{r^2} \cdot \frac{a^2-r^2}{0,75a^2} + i \\
 &\quad + \frac{qa^2}{16} \left[\frac{0,25}{0,75} \cdot 1,31 \cdot \left(\frac{a^2}{r^2}-1\right) \cdot \ln(0,5) + 1,31 \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right] - \frac{qa^2}{16} = i \\
 &\quad i \frac{qa^2}{16} \cdot 0,303 \cdot \left(\frac{a^2}{r^2}-1\right) - i \\
 &\quad - \frac{qa^2}{16} \cdot 0,303 \cdot \left(\frac{a^2}{r^2}-1\right) + \frac{qa^2}{16} \cdot 1,31 \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{qa^2}{16} = i \\
 &\quad i \frac{qa^2}{16} \left[1,31 \ln\left(\frac{a}{r}\right) - 1 \right]; \\
 (M_r)_{r \leq b} &= \frac{q \cdot 0,25a^2}{4} \left[\ln\left(\frac{a}{r}\right) \cdot (1+0,31) - 1 \right] = \frac{qa^2}{16} \left[1,31 \ln\left(\frac{a}{r}\right) - 1 \right].
 \end{aligned}$$

Функции распределенного изгибающего момента M_θ при

$b=0,5a, \mu=0,31$:

$$\begin{aligned}
 (M_\theta)_{r>b} &= \frac{q \cdot 0,25a^2}{4} (1+0,31) \cdot \ln\left(\frac{0,5a}{a}\right) \cdot \frac{0,25a^2 \cdot (a^2+r^2)}{r^2 \cdot (a^2-0,25a^2)} + i \\
 &\quad + \frac{q \cdot 0,25a^2}{4} \left[(1-0,31) + (1+0,31) \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{0,25a^2}{a^2-0,25a^2} \cdot (1+0,31) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \ln\left(\frac{0,5a}{a}\right) \left(\frac{a^2}{r^2}+1\right) \right] - \frac{q \cdot 0,25a^2}{4} = \frac{qa^2}{16} \cdot 1,31 \cdot \ln(0,5) \cdot \frac{0,25}{0,75} \cdot \left(\frac{a^2}{r^2}+1\right) + i \\
 &\quad + \frac{qa^2}{16} \cdot 0,69 + \frac{qa^2}{16} \cdot 1,31 \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{qa^2}{16} \cdot 1,31 \ln(0,5) \cdot \frac{0,25}{0,75} \cdot \left(\frac{a^2}{r^2}+1\right) - \frac{qa^2}{16} = i \\
 &\quad i \frac{qa^2}{16} \left[0,69 + 1,31 \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) - 1 \right] = \frac{qa^2}{16} \left[1,31 \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) - 0,31 \right]; \\
 (M_\theta)_{r \leq b} &= \frac{q \cdot 0,25a^2}{4} \left[\ln\left(\frac{a}{r}\right) \cdot (1+0,31) - 0,31 \right] = \frac{qa^2}{16} \left[1,31 \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) - 0,31 \right].
 \end{aligned}$$

По формулам находим величины $M_r, M_\theta, w(r)$ для ряда значений r .
 Результаты представлены в таблице.

Таблица 2 – Результаты расчета круглой пластины.

r	0	$0,125 a$	$0,25 a$	$0,375 a$	$0,5 a$	$0,625 a$	$0,75 a$	$0,875 a$	$1 a$
$\frac{M_r}{qa^2}$	0,1762	0,1078	0,0510	0,0178	-0,0057	-0,0240	-0,0389	-0,0516	-0,0625
$\frac{M_\theta}{qa^2}$	0,1762	0,1509	0,0941	0,0609	0,0374	0,0191	0,0042	-0,0084	-0,0194
$\frac{w(r)}{qa^2/D}$	0,0092	0,0082	0,0068	0,0049	0,0027	0,0016	0,0008	0,0002	0,0000

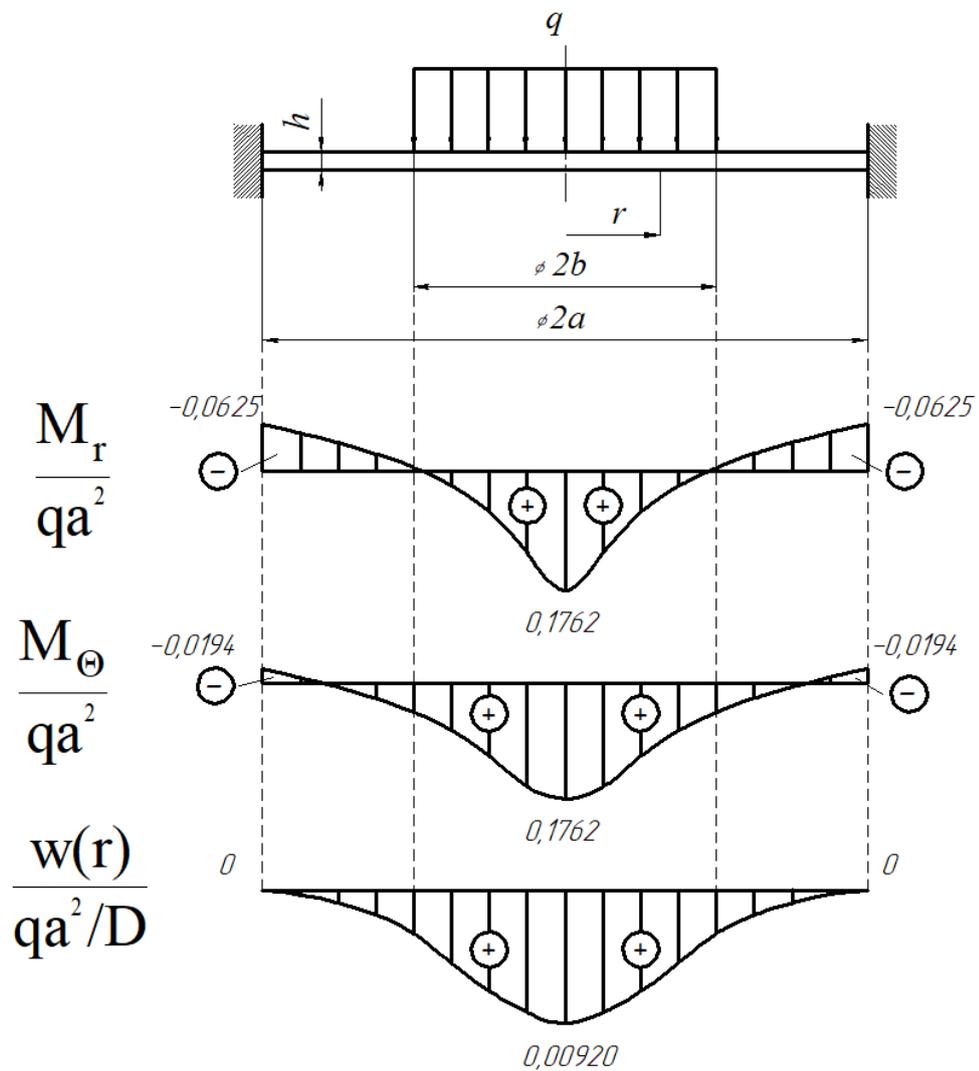


Рисунок 6 – Эпюры.

Анализ эпюр M_r и M_θ показывает, что опасными будут наиболее удаленные от срединной плоскости нижние точки в центре пластины.

В окрестности опасной точки выделим элементарный объем.

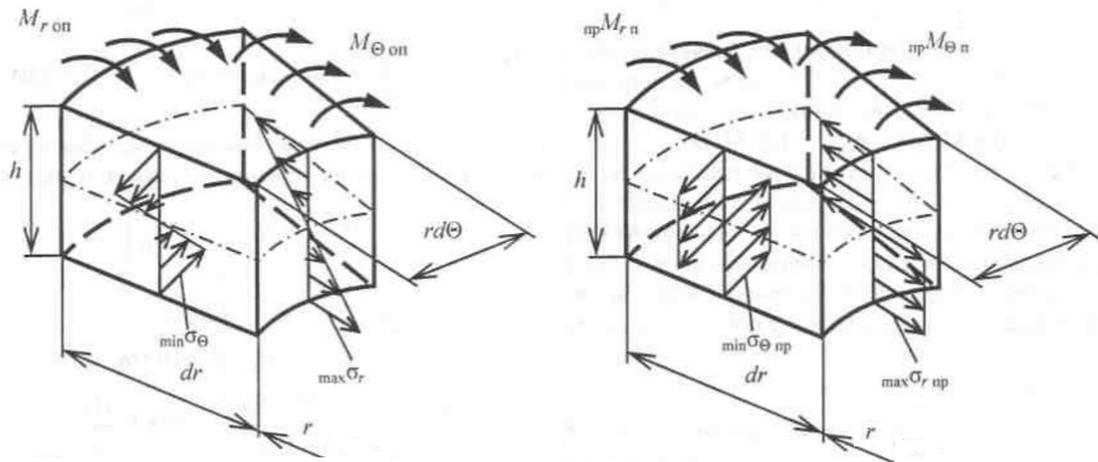


Рисунок 7 – *i* Внутренние силовые факторы.

Экстремальные напряжения в опасных точках:

$$\sigma_{rmax} = \sigma_1 = \sigma_{\theta max} = \sigma_3 = \frac{6 M_r}{h^2} = \frac{6 M_\theta}{h^2} = \frac{6 \cdot 0,1762 \cdot q \cdot a^2}{h^2}; \sigma_2 = 0.$$

В соответствии с четвертой теорией прочности:

$$\sigma_{эkv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma_m];$$

$$[\sigma_m] = \frac{\sigma_m}{\eta_m} = \frac{370}{2,7} = 137,037 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{эkv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(0,1762 \frac{6 q a^2}{h^2} - 0\right)^2 + \left(0 - 0,1762 \frac{6 q a^2}{h^2}\right)^2 + \left(0,1762 \frac{6 q a^2}{h^2} - 0,1762 \frac{6 q a^2}{h^2}\right)^2} = i$$

$$i \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0,632 \cdot \frac{q}{h^2} = 0,447 \cdot \frac{q}{h^2} \leq [\sigma_m].$$

Из условия прочности допускаемое давление:

$$[q]_\sigma = \frac{[\sigma_m] \cdot h^2}{0,447} = \frac{137,037 \cdot 0,024^2}{0,447} = 0,177 \text{ МПа}.$$

Проверяем условие жесткости:

$$w_{max} = \frac{0,00920 \cdot q a^2}{D} = \frac{0,00920 \cdot [q]_{\sigma} \cdot a^2 \cdot 12(1-\mu^2)}{E h^3} = \dot{=} \\ \dot{=} \frac{0,00920 \cdot 0,177 \cdot 0,65^2 \cdot 12(1-0,31^2)}{10^5 \cdot 0,024^3} = 0,0053 \text{ м.}$$

$w_{max} = 0,0053 \text{ м} > [w] = 0,0013 \text{ м}$ – условие жесткости не выполняется.

Вычисляем допускаемое давление из условия жесткости пластины:

$$w_{max} = \frac{0,00920 \cdot q a^2}{D} \leq [w] \\ [q]_w = \frac{[w] \cdot D}{0,00920 a^2} = \frac{[w] \cdot E h^3}{0,00920 \cdot 12(1-\mu^2) a^2} = \dot{=} \\ \dot{=} \frac{0,0013 \cdot 10^5 \cdot 0,024^3}{0,00920 \cdot 12(1-0,31^2) \cdot 0,65^2} = 0,042 \text{ МПа.}$$

Окончательно принимаем минимальное значение давления:

$$q = 0,042 \text{ МПа.}$$

Вычисляем рабочие напряжения в опасной точке:

$$\sigma_{rmax} = \sigma_{\theta max} = \sigma_{\text{экв}} = 0,447 \cdot \frac{0,042}{0,024^2} = 32,594 \text{ МПа.}$$

Выводы и результаты:

- построены эпюры распределенных изгибающих моментов в окружном M_r и радиальном M_θ сечениях, также построена эпюра прогибов $w(r)$ (рисунок 8). Анализ эпюр показал, что опасными сечениями являются наиболее удаленные от срединной плоскости нижние точки в центре пластины. Значения моментов M_r , M_θ , прогиба $w(r)$ и возникающих внутренних напряжений σ_r , σ_θ увеличиваются при увеличении диаметра пластины;
- полученное из условия прочности давление $[q]_\sigma = 0,177 \text{ МПа}$ не удовлетворяет заданному условию жесткости. Давление, которое удовлетворяет условиям прочности и жесткости, равняется: $q = 0,042 \text{ МПа}$. Величина допускаемого давления зависит от применяемого материала, для того чтобы достичь заданного условия жесткость необходимо применить материал с большим модулем Юнга E . При увеличении модуля Юнга E уменьшается прогиб пластины;
- рабочее напряжение в опасной точке пластины: $\sigma_{r \max} = \sigma_{\theta \max} = \sigma_{\text{экв}} = 32,594 \text{ МПа}$. Возникающие внутренние напряжения σ_r , σ_θ прямо пропорциональны давлению q и обратно пропорциональны толщине пластины h .

Данный метод расчета можно использовать для таких элементов конструкции ракеты, как донная защита и днища баков, также данная схема может использоваться в качестве примера полезного груза, который расположен в головной части ракеты. При полете полезный груз давит на ракету по ее диаметру.

Характер нагружения исходной расчетной схемы соответствует состоянию нижней части ГО, на которую действует полезный груз.

Так как между полезным грузом и створками ГО присутствует зазор, то расчет, приведенный в данной работе, можно использовать для вычисления расчета на прочность и жесткость данного элемента ракеты.

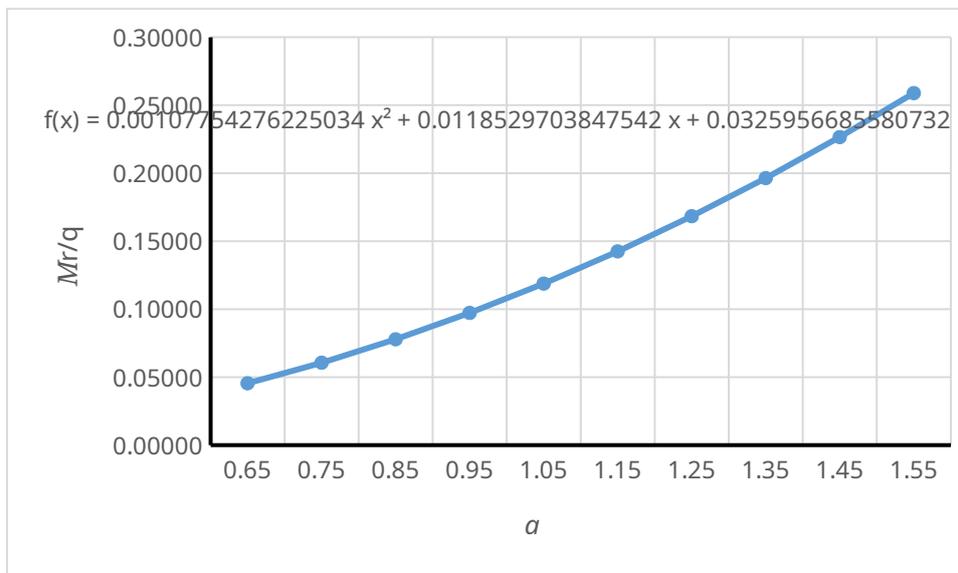


Рисунок 8 – Зависимость значения M_r от диаметра пластины a .

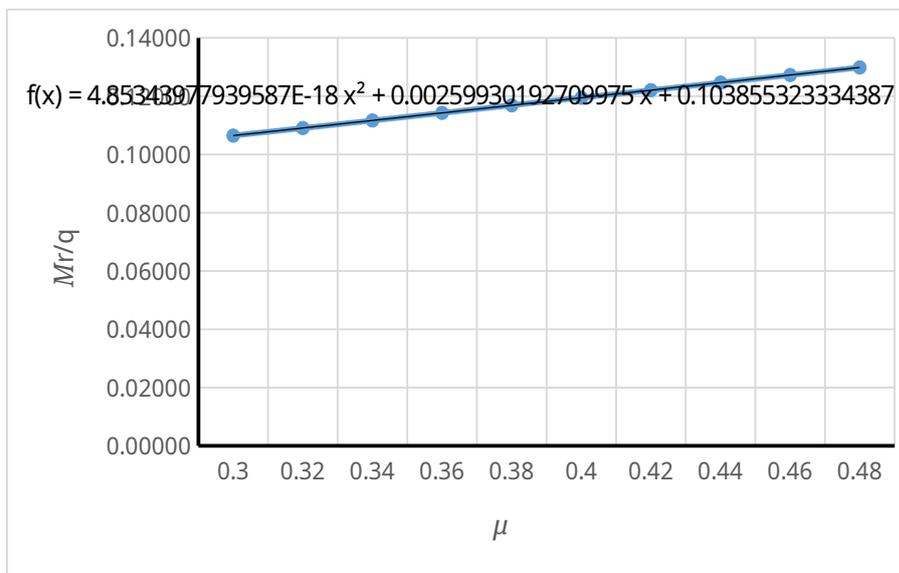


Рисунок 9 – Зависимость значения M_r от коэффициента Пуассона μ .

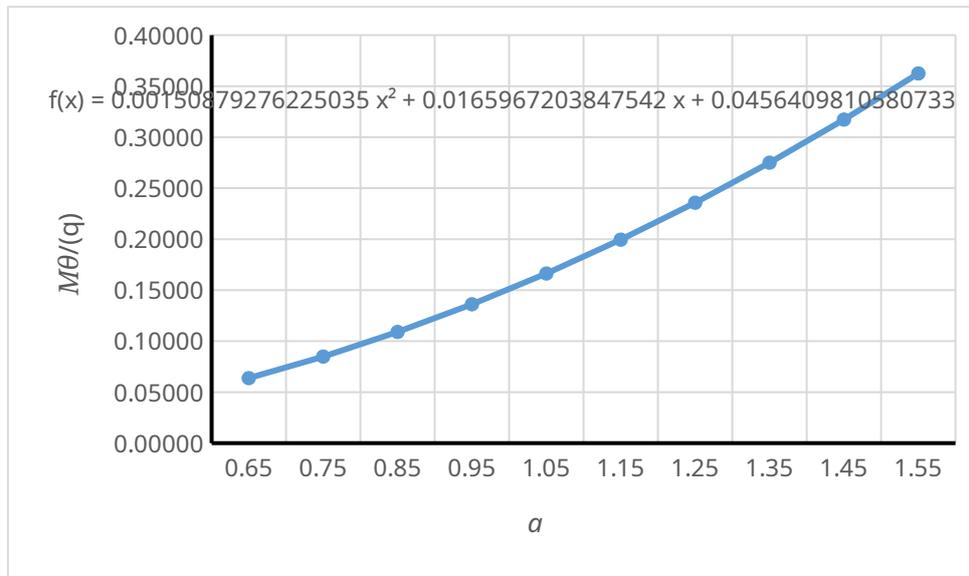


Рисунок 10 – Зависимость значения M_{θ} от диаметра пластины a .

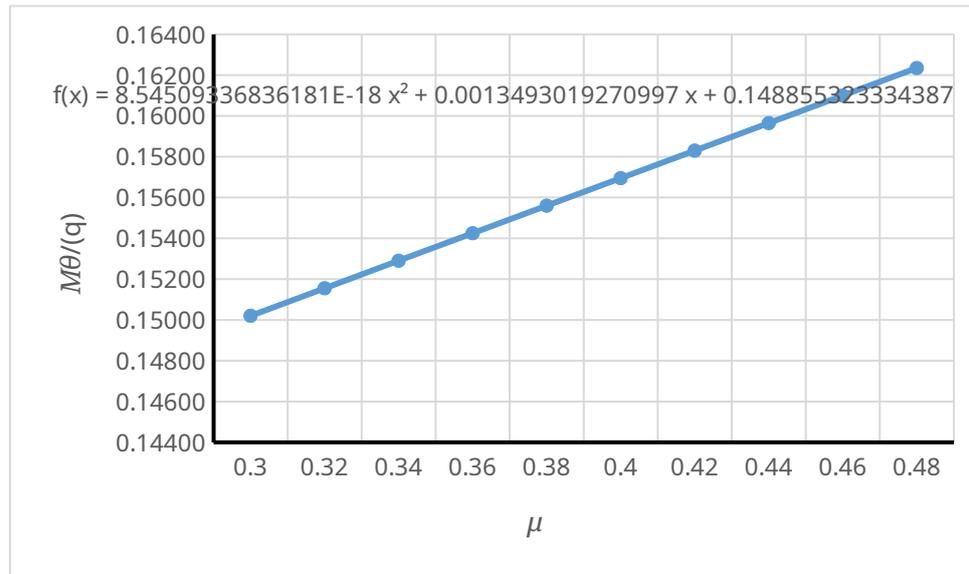


Рисунок 11 – Зависимость значения M_{θ} от коэффициента Пуассона μ .

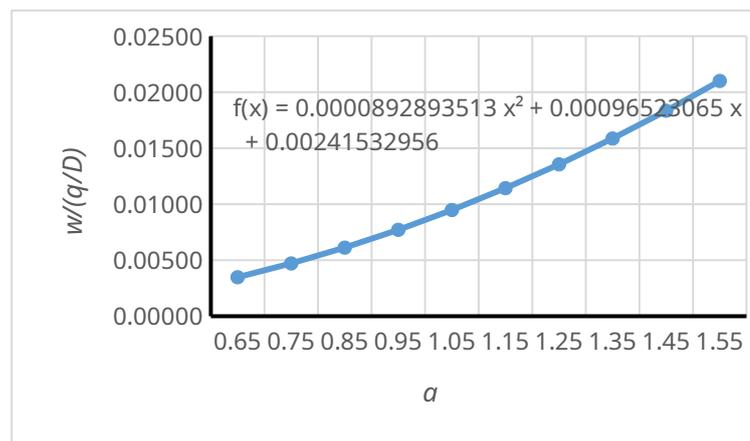
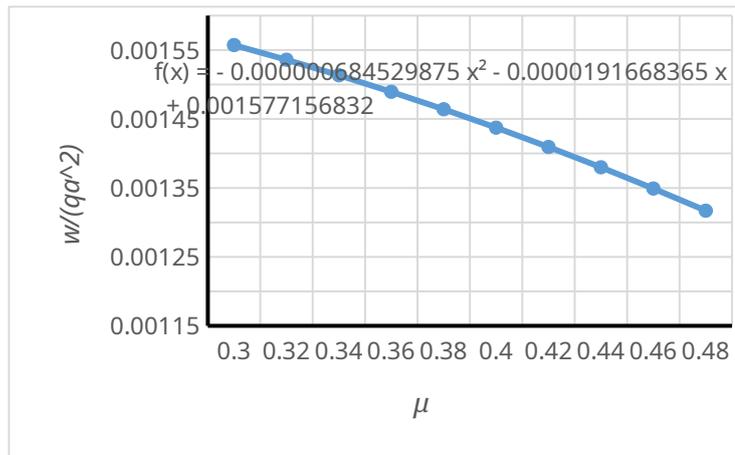


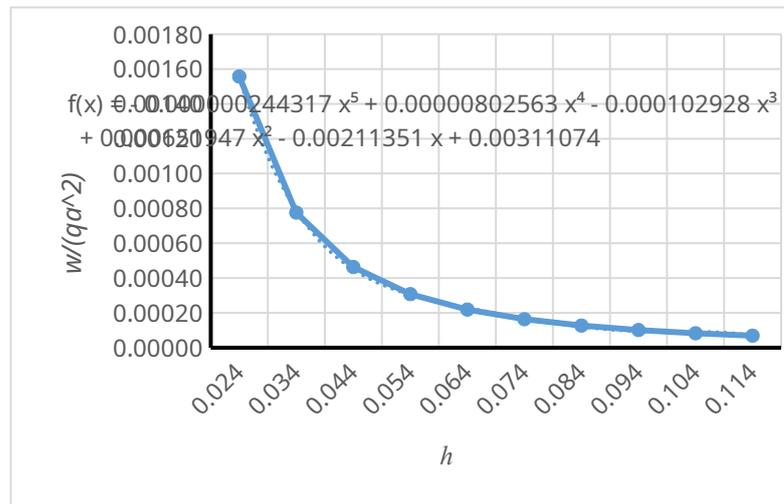
Рисунок 12 – Характер изменения значения прогиба w от диаметра пластины a .

Задача 2. Расчет на прочность оболочки вращения при осесимметричном нагружении



Постановка задачи:

Произвести расчет на прочность нагруженной составной



осесимметричной оболочки вращения.

Таблица 3 – Исходные данные.

a/R	b/R	c/R	H/R	h/R	$p_0, \text{МПа}$	$\gamma, \text{кН/м}^3$	Материал
0,5	2	5	2,5	0,006	4	15	25ХГСА

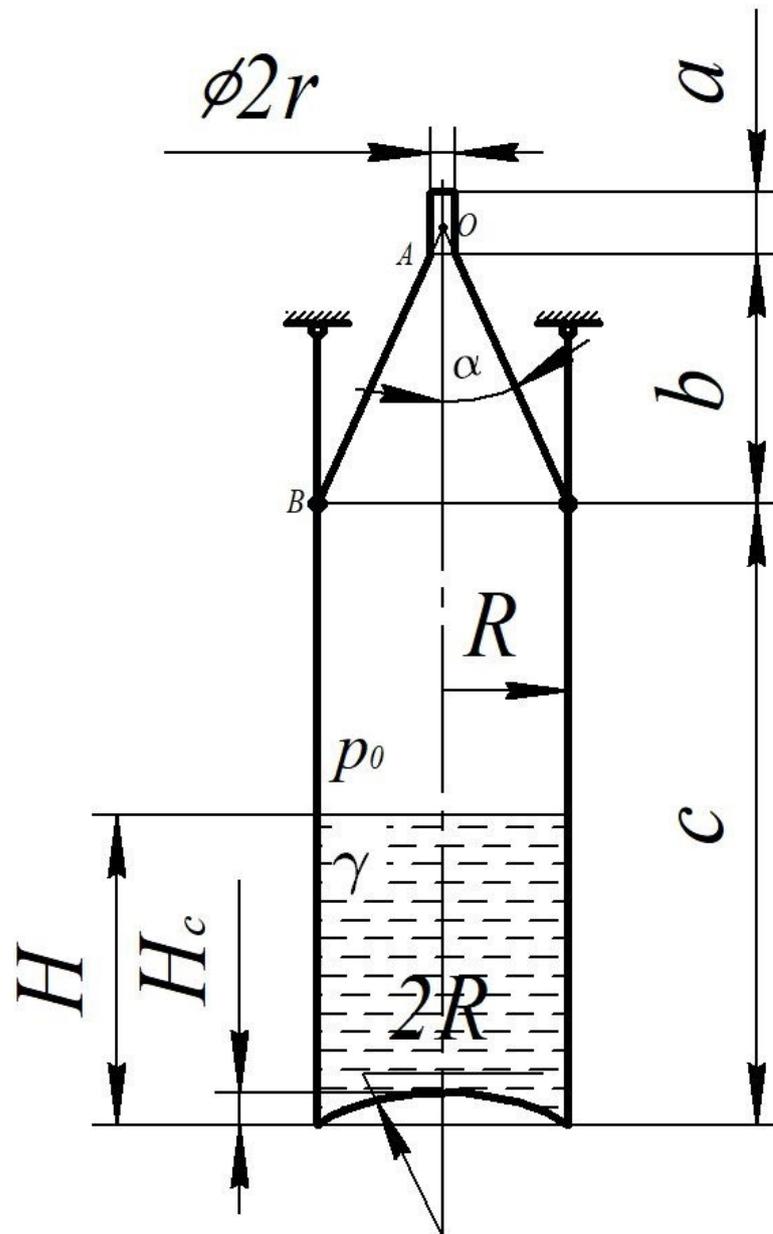


Рисунок 15 – Расчетная схема оболочки.

Дано:

- расчетная схема 4 (рисунок 17);
- геометрические размеры: $R=1\text{ м}$; $r=0,1\text{ м}$; $a=0,5\text{ м}$; $b=2\text{ м}$; $c=5\text{ м}$; $H=2,5\text{ м}$; $h=0,006\text{ м}$;
- действующие нагрузки: удельный вес жидкости – $\gamma=15\text{ кН/м}^3$; давление газа – $p_0=4\text{ МПа}$;
- материал: сталь 25ХГС, предел текучести $\sigma_T=965\text{ МПа}$, предел прочности $\sigma_B=1076\text{ МПа}$.

Требуется:

- построить эпюры давления p , кольцевых σ_t , меридиональных σ_m и эквивалентных (по третьей гипотезе прочности напряжений);
- определить запас прочности нагруженной оболочки.

Решение:

Резервуар является составной оболочкой и состоит из конических и цилиндрических частей.

Верхняя цилиндрическая часть резервуара:

- кольцевое напряжение:

$$\sigma_t = p_0 \cdot \frac{r}{h} = 4 \cdot \frac{0,1}{0,006} = 66,667 \text{ МПа.}$$

- меридиональное напряжение:

$$\sigma_m = p_0 \cdot \frac{r}{2h} = 4 \cdot \frac{0,1}{2 \cdot 0,006} = 33,333 \text{ МПа.}$$

Коническая часть резервуара:

- угол полураствора конуса:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{R-r}{b}\right) = \arctg\left(\frac{1-0,1}{2}\right) = 24,23^\circ;$$

- кольцевое напряжение и меридиональное напряжение:

$$\sigma_t = p_0 \cdot \frac{x \operatorname{tg}(\alpha)}{h}; \sigma_m = p_0 \cdot \frac{x \operatorname{tg}(\alpha)}{2h},$$

где $x = OA \dots OB$.

Из геометрических соотношений:

$$OB = \frac{R}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\sin(24,23^\circ)} = 2,437 \text{ м};$$

$$OA = \frac{r}{\sin(\alpha)} = \frac{0,1}{\sin(24,23^\circ)} = 0,244 \text{ м.}$$

Значения напряжений при $x = 0,243 \text{ м}$:

$$\sigma_t = p_0 \cdot \frac{x \operatorname{tg}(\alpha)}{h} = 4 \cdot \frac{0,244 \cdot \operatorname{tg}(24,23^\circ)}{0,006} = 73,207 \text{ МПа};$$

$$\sigma_m = p_0 \cdot \frac{x \operatorname{tg}(\alpha)}{2h} = 4 \cdot \frac{0,244 \cdot \operatorname{tg}(24,23^\circ)}{2 \cdot 0,006} = 36,604 \text{ МПа.}$$

Значения напряжений при $x = 2,437 \text{ м}$:

$$\sigma_t = p_0 \cdot \frac{x \operatorname{tg}(\alpha)}{h} = 4 \cdot \frac{2,437 \cdot \operatorname{tg}(24,23^\circ)}{0,006} = 731,176 \text{ МПа};$$

$$\sigma_m = p_0 \cdot \frac{x \operatorname{tg}(\alpha)}{2h} = 4 \cdot \frac{2,437 \cdot \operatorname{tg}(24,23^\circ)}{2 \cdot 0,006} = 365,588 \text{ МПа}.$$

Цилиндрическая часть над зеркалом жидкости:

- кольцевое напряжение:

$$\sigma_t = p_0 \cdot \frac{R}{h} = 4 \cdot \frac{1}{0,006} = 666,667 \text{ МПа}.$$

- меридиональное напряжение:

$$\sigma_m = p_0 \cdot \frac{R}{2h} = 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 0,006} = 333,333 \text{ МПа}.$$

Цилиндрическая часть, заполненная жидкостью:

- кольцевое напряжение и меридиональное напряжение:

$$\sigma_m = (p_0 + \gamma H) \cdot \frac{R}{2h} = (4 + 15 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5) \cdot \frac{1}{2 \cdot 0,006} = 336,458 \text{ МПа};$$

$$\sigma_t = (p_0 + \gamma(H - x_1)) \cdot \frac{R}{h},$$

где $x_1 = 0 \dots H$.

Значение напряжения при $x_1 = 0 \text{ м}$:

$$\sigma_t = (p_0 + \gamma(H - x_1)) \cdot \frac{R}{h} = i$$

$$i(4 + 15 \cdot 10^{-3}(2,5 - 0)) \cdot \frac{1}{0,006} = 672,917 \text{ МПа}.$$

Значение напряжения при $x_1 = H = 2,5 \text{ м}$:

$$\sigma_t = (p_0 + \gamma(H - x_1)) \cdot \frac{R}{h} = i$$

$$i(4 + 15 \cdot 10^{-3}(2,5 - 2,5)) \cdot \frac{1}{0,006} = 666,667 \text{ МПа}.$$

Сферическая часть:

- напряжения:

$$\sigma_t = \sigma_m = - \left[(p_0 + \gamma(H - x_2)) \cdot \frac{R}{h} \right],$$

где $x_2 = 0 \dots H_c$.

Из геометрических соотношений:

$$H_c = 2R \cdot (1 - \cos(\beta)),$$

$$\text{где } \beta = \arcsin\left(\frac{R}{2R}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ.$$

$$H_c = 2R \cdot (1 - \cos(30^\circ)) = 2 \cdot 1 \cdot (1 - \cos(30^\circ)) = 0,268 \text{ м.}$$

Значение напряжения при $x_2 = 0 \text{ м}$:

$$\sigma_t = \sigma_m = -\left[(p_0 + \gamma(H - x_2)) \cdot \frac{R}{h} \right] = \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} - \left[(4 + 15 \cdot 10^{-3} \cdot (2,5 - 0)) \cdot \frac{1}{0,006} \right] = -672,917 \text{ МПа.}$$

Значение напряжения при $x_2 = H_c = 0,268 \text{ м}$:

$$\sigma_t = \sigma_m = -\left[(p_0 + \gamma(H - x_2)) \cdot \frac{R}{h} \right] = \dot{\iota}$$

$$\dot{\iota} - \left[(4 + 15 \cdot 10^{-3} \cdot (2,5 - 0,268)) \cdot \frac{1}{0,006} \right] = -672,247 \text{ МПа.}$$

Давление в нижней точке:

$$p = \gamma H + p_0 = 15 \cdot 10^{-3} \cdot 2,5 + 4 = 4,038 \text{ МПа.}$$

По третьей гипотезе прочности имеем: где σ_1, σ_3 – главные напряжения.

В рассматриваемом резервуаре напряжение σ_t и σ_m являются главными, причем $\sigma_t = \sigma_1, \sigma_t = \sigma_2, \sigma_t = -p$.

Так как $|\sigma_3| \ll |\sigma_1|$, то $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_t$, эпюра $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}$ совпадает с эпюрой σ_t .

Запас прочности:

$$n = \frac{\sigma_B}{\dot{\iota}\dot{\iota}}$$

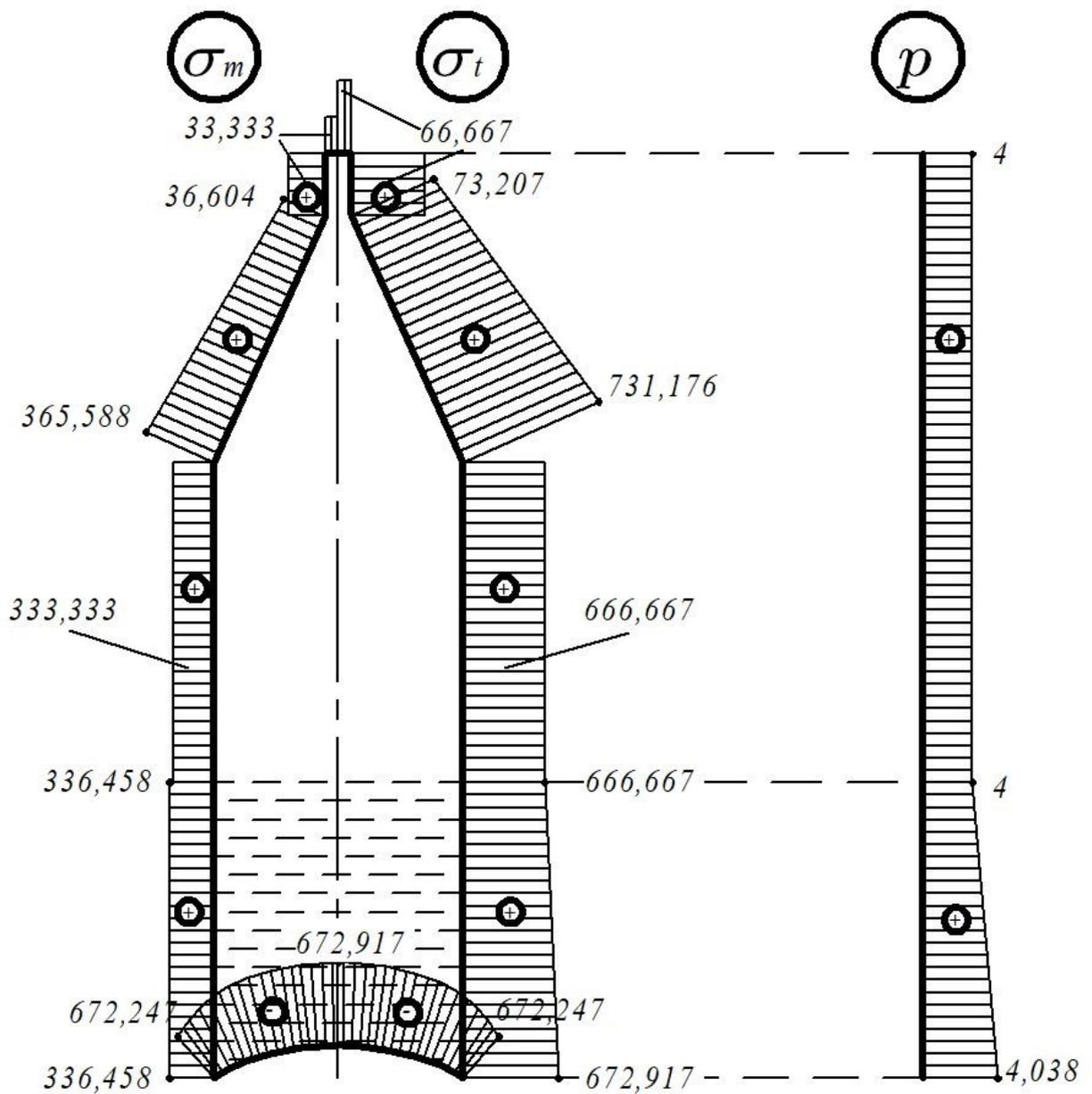


Рисунок 16 – Эпюры напряжений и прикладываемого давления.

Выводы и результаты:

- построены эпюры давления p , кольцевых σ_t , меридиональных σ_m и эквивалентных $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}$ (по третьей гипотезе прочности) напряжений. Кольцевые напряжения больше в 2 раза чем меридиональные во всех частях оболочки вращения (кроме сферической части, для сферической части $\sigma_t = \sigma_m$), и имеют максимальное значение в донной части резервуара.

- значения кольцевых σ_t и меридиональных σ_m прямо пропорциональны радиусу и обратно пропорциональны толщине стенки. При определении кольцевых σ_t и меридиональных σ_m оболочки вращения формы усеченного конуса можно заметить, что при увеличении угла полураствора значения возникающих внутренних напряжений будут уменьшаться.
- определили, что резервуар не разрушается под данной нагрузкой, т.к. запас прочности $n=1,6$. Есть смысл провести испытание на разрушения конструкции, для выявления пределов прочности и текучести материала, также следует усилить бак внутренними или внешними силовыми наборами;

Данный метод расчета можно использовать для таких элементов конструкции ракеты, как топливные баки (нагруженные внутренним давлением и гидростатической нагрузкой), корпуса ракеты (нагруженные внешними нагрузками), также данную методику можно использовать для расчета баллонов, заполненных жидкостью или газом.

Заключение

В ходе курсовой работы были решены следующие задачи:

1. Расчет на прочность и жесткость круглой стальной пластины при осесимметричном изгибе;
2. Расчет на прочность нагруженной составной осесимметричной оболочки вращения;
3. По каждой задаче представлены выводы, исходя из полученных результатов.